Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 28 de febrero de 2025.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 489. *Propuesto por Vasile Mircea Popa, Lucian Blaga University, Sibiu, Rumanía.*

Evaluar la integral

$$\int_0^\infty \frac{x \log x}{1+x^3}\, dx.$$

Problema 490. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Sean s, R y r respectivamente el semiperímetro, el circunradio y el inradio de un triángulo ABC. Probar que ABC es un triángulo rectángulo si y solo si se cumple la relación $s = r + 2R$.

Problema 491. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n \frac{1+n^2 \operatorname{sen}^2 x}{1+n^2\cos^2 x}\, dx.$$

PROBLEMA 492. *Propuesto por Gregory Dresden, Washington & Lee University, Lexington, VA, EE. UU.*

La figura muestra la *epitrocoide* de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) + A\cos(5t), \\ y(t) = \operatorname{sen}(2t) + A\operatorname{sen}(5t), \end{cases}$$

para $A = 0.9$. Probar que los tres bucles interiores de la epitrocoide son tangentes entre sí cuando

$$A = \frac{\sqrt{6}}{20}\sqrt{7\sqrt{21}+27} \approx 0.941399\ldots$$

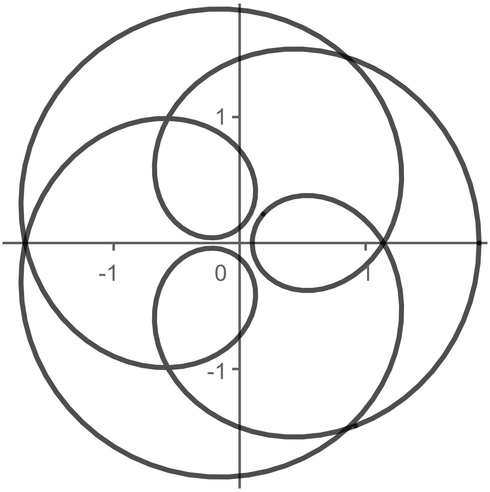

Figura correspondiente al problema 492.

PROBLEMA 493. *Propuesto por Daniel Sitaru, National Economic College "Theodor Costescu", Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean x, y y z números reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Probar que:

$$e^3(e^{-2x} + e^{-2y} + e^{-2z}) + 3e \geq 2(e^x + e^y + e^z).$$

PROBLEMA 494. *Propuesto por Ricardo Barroso, Sevilla.*

Las longitudes de los lados de un triángulo ABC verifican $a < b < c$ ($a = BC$, etc. cíclicamente). Sean I el incentro del triángulo y r la recta perpendicular a AI por el punto I, y supongamos que r corta a la recta BC en el punto X.

a) Calcular las distancias CX y BX en función de a, b y c.